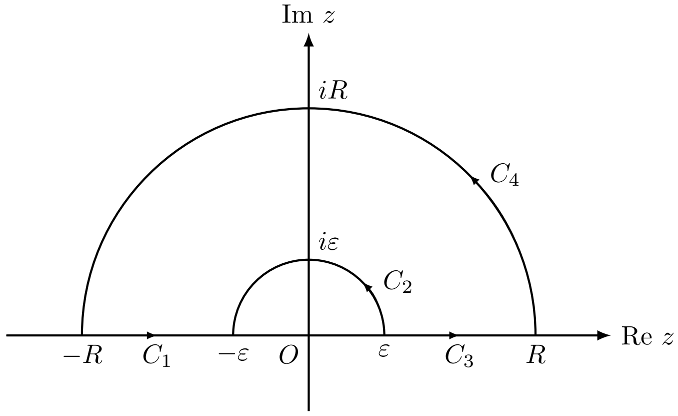
Theorem.

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

が成り立つ.

Proof. 複素積分を用いて証明していく.

$f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z}$ とし, その主値積分を考える. $R, \varepsilon > 0$ とし, 積分路として以下の半円を 2 つ組み合わせた経路を考える.



Cauchy の積分定理より

$$\int_{C_1 - C_2 + C_3 + C_4} f(z)\,dz = 0$$

が成り立つ.

ここで, 各積分路における積分について考えていく.

$$\begin{aligned}
\int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_3} f(z)\,dz &= \int_\varepsilon^R \frac{e^{it}}{t}\,dt + \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{it}}{t}\,dt \\
&= \int_\varepsilon^R \frac{e^{it}}{t}\,dt - \int_\varepsilon^R \frac{e^{-it}}{t}\,dt \\
&= \int_\varepsilon^R \frac{e^{-it} - e^{-it}}{t}\,dt \\
&= 2i \int_\varepsilon^R \frac{\sin t}{t}\,dt \\
\int_{C_2} f(z)\,dz &= \int_0^\pi \frac{e^{i\varepsilon e^{it}}}{\varepsilon e^{it}} \cdot i\varepsilon e^{it}\,dt \\
&= i \int_0^\pi e^{i\varepsilon e^{it}}\,dt \\
&= i \int_0^\pi \left\{ 1 + \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n!} \varepsilon^n e^{int} \right\} dt \\
&= i\pi + \varepsilon \sum_{n=1}^\infty \varepsilon^{n-1} \frac{(-1)^n}{n \cdot n!} \\
\left| \int_{C_4} f(z)\,dz \right| &\le \int_{C_4} |f(z)|\,|dz|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \int_0^{\pi} e^{-R\sin t}\,dt \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin t}\,dt \\
&\leq 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2R}{\pi}t}\,dt \\
&= \frac{\pi}{R}(1-e^{-R})
\end{aligned}
$$

となる.

以上より, $R \to \infty, \varepsilon \to 0$ のとき

$$2i\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt - i\pi = 0$$

となり

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$$

となる. ■